A PROPOS DES NŒUDS

Peter Guthrie Tait

[Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1876-77. Révisé le 11 Mai 1877.]

TRADUIT PRÈS NATHALIE EPRON AND ROBERT TATUM GROOME

L'ARTICLE suivant contient, sous forme condensée, plusieurs communications importantes produites à la Société Royale d'Edinburgh durant la présente session. On identifiera aisément le point crucial de chacun de ces articles à partir des citations données dans les compte-rendus. Elles comprennent, en fait, beaucoup d'éléments que je n'ai pas reproduits dans cet article. Rien d'importance n'a été ajouté depuis que ces articles furent communiqués, mais le contenu s'est trouvé beaucoup simplifié du fait de l'adoption d'un ordre d'arrangement différent. Des énoncés généraux plus brefs ont remplacé les longs passages des articles précédents. A l'exception de la partie traitant de la question principale, cet article est fragmenté à l'extrême. Peut-être le manque de temps ou l'appel d'autres travaux pressants pourraient-ils être invoqués ; mais là ne réside pas l'unique raison. Le sujet s'avère beaucoup plus difficile et compliqué qu'on ne peut penser à première vue, et j'ai l'impression que je n'ai pas réussi à en saisir le point crucial. Ce dernier enfin cerné, les différents résultats ici donnés apparaîtront sans doute dans leur relation réelle les uns avec les autres, voire comme la conséquence d'une meilleure articulation de la question elle-même.

Je fus introduit à la considération des formes de nœuds par *La Théorie des Atomes Tourbillonnants*** de Sir W. Thomson, et mon parti-pris de départ a donc consisté à classifier les nœuds par le nombre de leurs croisements ; ou, ce qui revient au même, *à examiner des modes fondamentalement différents permettant de lier des points sur un plan pour la formation de courbes planes fermées uniques avec un nombre donné de points doubles.*

Le nombre considérable de lignes dans le spectre de certaines substances élémentaires montre que, si la suggestion de Thomson est correcte, la forme des atomes tourbillonnants correspondants ne peut être perçue comme très simple. Car bien qu'il existe, bien-sûr, un nombre infini de modes possibles de vibrations pour chaque tourbillon, le nombre de modes dont la période est éloignée d'environ quelques octaves est réduit, à moins que la forme de l'atome ne soit très complexe. La difficulté réside donc en ceci, (supposant que les rayons visibles émis par un atome tourbillonnant appartiennent aux périodes plus basses) : "Ou sont passés les atomes tourbillonnants plus simples ?", ou encore, "Pourquoi n'avons nous pas découvert un nombre plus grand d'éléments ?" Du point de vue de la théorie des atomes tourbillonnants, cette question est d'une extrême importance.

Deux considérations nous aident à formuler une réponse. Premièrement, bien qu'il existe des possibilités de formes simples géométriquement, peu d'entre elles sont cinétiquement stables, et nous devons les composer pour être capables d'obtenir les 60 ou 70 formes permanentes déjà connues de ces éléments. Cela conduit à une question physique d'une difficulté extrême. Thomson a brièvement traité le sujet dans un article récent sur "Les Tourbillons Statiques"*, mais on ne peut pas dire qu'il ait découvert jusqu' à aujourd'hui ne serait ce que le début de cette théorie. Mais - et cela constitue la deuxième question - que ces formes soient stables ou non, existe-t-il vraiment beaucoup de formes différentes de nœuds possédant un quelconque petit nombre donné de croisements ? C'est à cette question cruciale que l'article suivant se propose de répondre. Cette approche de réponse me semble tout à fait novatrice.

Il me faut rappeler ici que lorsque j'ai commencé mes recherches, je n'avais pas encore pris connaissance des nombreux écrits scientifiques qui traitaient du problème des nœuds. Au début de mes recherches, personne à la Section A de l'Association Britannique de 1876 ne pouvait me fournir de référence ; c'est alors que je lus, par hasard, un petit article (No. XXXVIII ci-dessus) sur le sujet ; et ce ne fut qu'après avoir envoyé mon second article à la Société Royale que j' obtins, grâce à une remarque du Professeur Clerk-Maxwell, une copie du très remarquable essai de Listing, *Vorstudien zur Topologie*†, à propos duquel (en tant qu'il concerne mon sujet actuel) j'ai donné un compte-rendu au Proceedings de la Société du 3 Février 1877. Lors de cette présentation, et ainsi je le prévoyais, nombre de mes résultats étaient déjà connus, mais les quelques remarques les plus ténues sur mon travail m'ont été d'une grande utilité depuis. Listing n'a pas déterminé le nombre de formes distinctes de noeuds qui peuvent être obtenues à partir d'un nombre donné de croisements. En fait, il donne très peu d'exemples, se limitant à des formes à trois, cinq, et sept croisements. Cependant, il a émis plusieurs suggestions sur la représentation des noeuds en général, et a livré plusieurs notations pour la représentation d'un cas particulier de noeud réduit.

Bien que nos notes diffèrent dans la manière de découvrir le nombre distinct de noeuds, j'ai relevé une légère modification qui m'est très utile pour leur illustration et transformation. Ce travail de Listing, et une remarque aiguë faite par Gauss, (nous nous référerons plus tard à quelques commentaires de Clerk- Maxwell), semblent constituer tout ce qui a été écrit de conséquent sur ce sujet. J'ai indiqué dans le texte toutes les remarques que j'ai empruntées à ces auteurs ; et le compte-rendu du travail de Listing, auquel je fais référence ci-dessus, révélera les points où il m'a précédé.

---

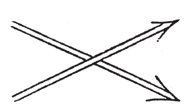
* *Proc. R.S.E.* 1875-6 (P. 59) † Göttinger Studien, 1847

Partie I

*Le schéma d'un nœud, et le nombre de schémas distincts pour chaque degré de nodalité ***

§ 1. Mes recherches partent de la découverte suivante : dans tout nœud ou *enlacement***, les croisements quels qu'ils soient peuvent être pris alternativement par-dessus et par-dessous. Cette découverte n'est pas récente, à en juger par les ornementations figurant sur différentes pierres Celtiques sculptées, etc. ; ce procédé s'inspire probablement des techniques de tissage ou de tressage. Je dois cette découverte à Mr. Dallas, qui m'a communiqué une photo d'une remarquable gravure de Durer**. Cette gravure expose un enlacement très complexe mais symétrique dans lequel cette alternance dessus/dessous est partout maintenue. L'article auquel nous nous référons atteste la vérité de ces propos à l'aide d'une preuve formelle et de quelques propriétés associées aux nœuds[*]. Elles représentent les conséquences directes du fait évident que deux courbes fermées sur un plan s'intersectent nécessairement l'une l'autre un nombre pair de fois. Il s'avère donc qu'en parcourant continûment toute courbe plane fermée, on passe toujours par un nombre pair d'intersections sur le chemin entre une intersection et elle-même. Par conséquent, dans le cas où nous construisons un nœud par le moyen de ces courbes et où nous prenons les croisements (qui maintenant correspondent aux intersections) par dessus et par dessous alternativement, lorsque nous revenons à un quelconque croisement, nous devrons aller dessous si nous nous sommes allés précédemment dessus, et vice-versa. Ceci constitue virtuellement la base de tout ce qui suit. Mais il est essentiel de remarquer que nous obtenons ainsi deux alternatives pour le croisement avec lequel nous commençons. Au lieu de la faire passer au-dessus du croisement, nous pouvons faire passer la branche avec laquelle nous commençons *au-dessous*. Ceci a pour effet de changer tout nœud donné en sa propre image dans un plan miroir -- c'est ce que Listing appelle perversion. A moins que la forme ne soit *autoduale*** (ce terme sera expliqué plus loin), cette perversion constitue une différence essentielle dans sa nature, et rend même le nœud distinct et incapable d'être déformé dans sa forme originale.

Listing parle de croisements comme *dexiotropes* et *laeotropes*. Si nous pensons aux bords d'une bande plate ou d'une bande de caoutchouc indien tordue autour de sa ligne médiane, nous reconnaissons tout de suite la différence entre un croisement droitier (dexiotrope), et un gaucher (laeotrope), (Planche IV. fig. 1). Ainsi les angles aigus sur la figure suivante sont orientés à gauche, les obtus orientés à droite ; et ils gardent ces caractéristiques si la figure est retournée (i.e. autour d'un axe dans le plan du papier) :



mais dans son image du miroir plan, cette orientation est intervertie.

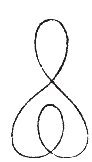
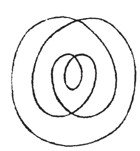
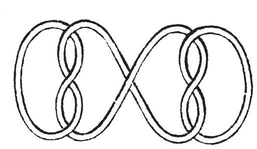
[*] No. XXXVIII ci-dessus.

§ 2. Supposons maintenant un nœud de forme quelconque que l'on projette comme une ombre sur un plan à partir d'un point lumineux. La projection comportera toujours nécessairement des points doubles*, et en général leur nombre pourra être augmenté -- mais non toujours diminué " par un changement de position du point lumineux, ou par une distorsion du fil ou de la corde à partir de laquelle se construit le nœud.

On doit supposer que ce fil ou cette corde puisse être plié, étendu ou contracté de n'importe quelle façon, à la seule condition qu'aucun arc de cercle ne puisse être tiré au travers d'un autre, de sorte que sa continuité ne pourra être interrompue. Il existe donc des projections de chaque nœud qui donnent un nombre *minimum* d'intersections, et c'est sur elles que nous allons limiter notre attention en premier lieu. Ultérieurement, nous considérerons une autre question : comment déterminer ce nombre minimum que nous appelerons *nodalité***, pour tout nœud particulier? Afin de satisfaire notre propos actuel, il suffit d'ôter les intersections qui sont *nécessairement* triviales, i.e., des intersections pour lesquelles aucune altération du mode de croisement ne se peut trouver. Les croisements sont tels que si on coupe les deux branches de chaque fil, et qu'on réunit leurs extrémités pour former deux courbes fermées distinctes, ces courbes distinctes ne seront pas enlacées, quelle que soit la façon dont elles sont nouées individuellement, i.e., excepté le cas où les courbes forment des nœuds séparés l'un de l'autre, de telle sorte que l'un d'entre eux puisse être resserré sans aucun obstacle majeur pour le fil. Dans ce cas le croisement trivial ne constituera qu'une *boucle*** simple.

[Nous pouvons définir un croisement nécessairement trivial comme celui au travers duquel une surface fermée, ou infiniment étendue, peut passer sans rencontrer le fil à aucun autre endroit que celui du croisement. Ou, comme on le verra plus tard (§ 20.), nous pouvons reconnaître un croisement nécessairement trivial comme étant un point où une région se rencontre elle-même.]

Dans les deux premiers dessins ci-dessous, tous les croisements sont nécessairement triviaux ; par contre, dans le troisième dessin, seul le croisement du milieu est trivial.

A présent ces dessins lettrés, selon un procédé que l'on expliquera, (voir, par exemple, Planche V. fig. 1), présentent respectivement les schémas suivants :

A *A* B *B* | A
A *C* B*B*C *A* | A
A *C* B *D* C *B* D *A* E *G* F *E* G *F* | A.

* Des points à multiples supérieurs à 2 peuvent, bien-sûr, se rencontrer, mais un infime changement de position du point lumineux, ou des dimensions relatives des enroulements du nœud fera disparaître ces points en les divisant en des points doubles, de sorte que nous pouvons nous passer de les considérer.

Ceux-ci ainsi que des exemples similaires révèlent que dans un schéma, un croisement est nécessairement trivial, si entre les deux apparitions d'une lettre dénotant ce croisement, il existe un groupe consistant en un ensemble quelconque de lettres, lesquelles apparaissant chacune deux fois. L'ensemble peut consister en tout nombre, zéro inclus. On jugera suffisant pour notre présent propos de considérer ce dernier cas particulier, i.e., *la même lettre apparaissant deux fois successivement dénote un croisement nécessairement trivial.*

§ 3. Si nous attribuons des lettres aux différents croisements, et si en parcourant continûment la courbe nous écrivons le nom de chaque croisement dans l'ordre dans lequel nous l'atteignons, nous obtenons, comme il sera prouvé plus tard, les moyens de dessiner sans ambiguïté la projection du nœud. Si de plus, nous notons si nous sommes passés par dessus ou par dessous à chaque occasion qui se présente d'atteindre un croisement, nous pouvons, encore sans ambiguïté, reconstruire le nœud en fil métallique ou en corde. Passer au-dessus, dans ce qui suit, est signifié à l'aide d'un + apposé à la lettre dénotant le croisement, et passer au dessous, par un –. Toute spécificité qui présente ces deux éléments d'information s'avère entièrement descriptive du nœud ; et quand elle se donne sous la forme particulière que nous allons expliquer, nous l'appelerons le Schéma.

Si, en accord avec le § 1, nous plaçons les croisements alternativement au dessus et au dessous, il est évident que les places impaires et les places paires du schéma contiendront chacune tous les croisements. Puisque nous disposons du choix des lettres, nous pouvons donc appeler les croisements dans les places impaires, A, B, C, etc., par ordre alphabétique, en commençant par un croisement quelconque, et en parcourent le fil métallique noué selon un quelconque des quatre chemins possibles, i.e. en commençant pour tout croisement par n'importe lequel des quatre chemins qui part de lui, nous attribuons les lettres respectivement au premier, troisième, cinquième, etc. croisements que nous rencontrons. Il est alors évident que le caractère essentiel du nœud projeté doit uniquement dépendre du chemin selon lequel les lettres sont distribuées dans les places paires du schéma. Bien-sûr, la nature et la réductibilité (i.e. la capacité de sa simplification par la suppression des croisements triviaux) du nœud lui-même dépendent aussi de l'ordre des signes. [En général, il existera quatre schémas différents pour un nœud quelconque, mais dans les cas les plus simples, ils sont souvent identiques, deux à deux, et parfois tous les quatre.]

§ 4. Nous pouvons ici remarquer l'évidence du phénomène consistant en ce que quand les croisements sont alternativement + et -, aucune réduction n'est possible à moins qu'il n'y ait des croisements triviaux, comme il est expliqué au § 2. Car la seule manière de se débarrasser de telles alternances de + et de - le long de la même corde consiste à détordre ; et ce procédé, hormis dans les cas essentiellement triviaux, permet de se débarrasser, en un endroit, d'un croisement qui rapparaîtra ailleurs sur la corde. Nous verrons plus loin que ce procédé peut être employé dans certains cas pour changer le schéma d'un nœud, et ainsi pour montrer que dans ces cas-ià il peut exister plus de quatre schémas différents représentant le même nœud, bien que, comme nous l'avons déjà noté, un schéma définisse parfaitement le nœud qu'il représente. Ainsi, donc, dans la première partie de notre travail, nous supposerons que les croisements sont pris alternativement + et -, de telle sorte qu'aucune réduction ne soit possible. Mais on remarquera plus loin que, même lorsqu'on enlève tous les croisements essentiellement triviaux, il n'est pas toujours nécessaire d'avoir l'alternance régulière